

## Olimpiada Națională de Matematică

### Etapă Locală

### Clasa a XII - a

### BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

1. Să se calculeze integrala  $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2026} dx, x > 0$

. Fie  $I = \int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2026} dx = \int \frac{2x+3}{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+2026} dx \dots\dots\dots 2p$   
 $= \int \frac{2x+3}{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+2026} dx = \int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1+2025} dx \dots\dots\dots 2p$   
 $= \int \frac{(x^2+3x)'}{(x^2+3x+1)^2+2025} dx \dots\dots\dots 2p$   
 Finalizare .....1p

2. Fie mulțimea  $M = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ impare} \right\}$  și  $G = M \times \mathbb{Z}$ .

Pe  $G$  definim legea de compoziție  $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + b_2)$ , oricare ar fi  $a_1, a_2 \in M$  și  $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ . Arătați că:

a)  $(G, *)$  formează un grup.

b) funcția  $f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*, f((a, b)) = a \cdot 2^b$  este un izomorfism între grupurile  $(G, *)$  și  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ .

. a)

Parte stabilă .....1p

Asociativitate.....1p

Elem. neutru .....1p

Elem. simetrizabil.....1p

b)

Morfism.....1p

Injectivitate.....1p

Surjectivitate.....1p

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $F$  o primitivă a sa cu proprietatea că  $e^{x-F(x)} = F(x)$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ .

Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .

. F primitivă a lui  $f \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = e^{x-F(x)} \cdot (1 - f(x))$ .....2p

Se obține că  $e^{x-F(x)} = \frac{f(x)}{1-f(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) \in [0,1)$  (mărginită).....3p

În acest caz, avem că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .....2p

4. Se consideră grupul  $(G, \cdot)$  și elementele  $a, b \in G$ , iar  $x = aba^{-1}$ . Să se calculeze  $x^2, x^3, x^{2025}$ .

$$x^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab(a^{-1}a)ba^{-1} = abba^{-1} = ab^2a^{-1}$$

$$x^3 = x^2 \cdot x = (ab^2a^{-1})(aba^{-1}) = ab^2(a^{-1}a)ba^{-1} = ab^3a^{-1}$$
.....3p

presupunem că  $x^n = ab^na^{-1}$  pentru un  $n$  dat și demonstrăm prin inducție că  $x^{n+1} = ab^{n+1}a^{-1}$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x = (ab^na^{-1})(aba^{-1}) = ab^n(a^{-1}a)ba^{-1} = ab^nb a^{-1} = ab^{n+1}a^{-1}$$
.....3p

Deci,  $x^n = ab^na^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^{2025} = ab^{2025}a^{-1}$ .....1p